数理解析研究所講究録
180巻 1973年 65-74

直観主義述語論理における Skolem function について

城西大 理　　白井古希男

§1. 序

Aを，自由変数を含まない冠頭標準形の論理式とする．Aに現われない新しい関数記号を用いて存在作用素を消去することによってAから得られた論理式をA°と書く．ここに新しく導入された関数を Skolem function とよぶ．Rasiowa [3] は，Hilbert の ε-定理の代数的証明を与えるために次の超定理が古典述語論理について成立することを示したが，その際に超定理は直観主義述語論理についても成立することを示した：

$\mathfrak{A}$を自由変数を含まぬ冠頭標準形の論理式だけからなる公理系，$\mathfrak{A}^{\circ}$を$\mathfrak{A}$の各公理Aに対してA°の全体からなる公理系とする．このとき，Skolem function を含まぬ論理式が$\mathfrak{A}^{\circ}$から証明可能ならば$\mathfrak{A}$からも証明可能である．従って，$\mathfrak{A}$が無矛盾であるための必要十分条件は$\mathfrak{A}^{\circ}$が無矛盾となることである．

Rasiowa の定理は Maehara [2] の定理1をくりかえし適用

することによって直ちに得られる．Maeharaの定理は古典述語論理について証明してあるが，直観主義述語論理についてもそのまま通用する証明である．

しかし，古典述語論理においては公理を冠頭標準形のものに限定しても本質的な制限にはならないが，直観主義の場合は本質的な制限になる．そこでRasiowa-Sikorski [4]は‘どのようにSkolem functionを拡張定義すれば，必ずしも冠頭標準形でない論理式からなる一般の公理系についても上述の超定理が成立するか’という問題を提出した．ここではその解を与える．

§2．拡張されたSkolem functionの定義と基本定理

2.1．直観主義における論理式の同等

$$\forall x A(x) \sim \forall y A(y), \quad \exists x A(x) \sim \exists y A(y)$$

Cがxを含まぬとき，

$$\exists x(C \wedge A(x)) \sim C \wedge \exists x A(x), \quad \exists x(C \vee A(x)) \sim C \vee \exists x A(x)$$

$$\forall x(C \wedge A(x)) \sim C \wedge \forall x A(x)$$

2.2．negativeな$\forall x$が関数記号にかえられるとまずい例：

式 $$P(a) \supset Q \rightarrow \exists x(P(x) \supset Q)$$

は証明可能であるが

式 $$\forall x P(x) \supset Q \rightarrow \exists x(P(x) \supset Q)$$

は証明不可能である．

Positive な $\exists x$ が関数記号にかえられるとまずい例：

式 $$P \supset Q(a) \rightarrow \exists x(P \supset Q(x))$$

は証明可能であるが

式 $$P \supset \exists x Q(x) \rightarrow \exists x(P \supset Q(x))$$

は証明不可能である。

2.3. 作用素 ∘ と拡張された Skolem function の定義

A は自由変数を含まぬ論理式で，2.1 により限定作用素にはすべて異なる束縛変数が用いられているとする．A の半部分論理式 V に対し V° を構成の順序に従って定義する．

1) P が述語記号のとき，$(P(v_1, \cdots, v_n))^\circ$ は $P(v_1, \cdots, v_n)$.

2) $(\neg B)^\circ$, $(B \supset C)^\circ$ はそれぞれ $\neg B$, $B \supset C$.

3) $(B \wedge C)^\circ$, $(B \vee C)^\circ$, $(\forall x B(x))^\circ$ はそれぞれ $B^\circ \wedge C^\circ$, $B^\circ \vee C^\circ$, $\forall x(B(x))^\circ$.

4) $(\exists x B(x))^\circ$ は $(B(f(x_1, \cdots, x_n)))^\circ$ である．ここに，$x_1, \cdots, x_n$ は A において $\exists x B(x)$ を限定作用素の作用域に含む $\forall x_i$ のすべてであり，f は新しい関数記号である．これを Skolem function とよぶ．

2.4. 新しく定義された直観主義の述語論理における Skolem function について，次の定理が証明できる．

定理. 論理式 C が A° の Skolem function を含まぬとき，もし式

$$A^\circ \rightarrow C$$

が証明可能ならば

$$A \to C$$

も証明可能である。

系. 自由変数を含まぬ論理式からなる公理系$\mathfrak{A}$が無矛盾であるための必要十分条件は$\mathfrak{A}'$が無矛盾となることである。

系. Rasiowa の定理が成立する。

さて，上の定理を証明するには次の基本定理を証明すれば十分である。

基本定理. Aは自由変数を含まぬ論理式で，限定作用素にはすべて異なる束縛変数が用いられており，$\exists$は可能な限り外へ，$\forall$は可能な限り内へ入れてあるとする。Aにおいて固定された occurrence $\exists y F(y, x_1, \cdots, x_n)$ を $F(f(x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n)$ でおきかえた論理式をA^fと書く。ここにfは新しい関数記号で，

1) $\exists y F(y, x_1, \cdots, x_n)$ はAの半部分論理式であり，

2) $\exists y F(y, x_1, \cdots, x_n)$ の外には論理記号 $\neg$, $\supset$, $\exists$ はなく，

3) $\exists y F(y, x_1, \cdots, x_n)$ の外にある$\forall$は$\forall x_i$以外にはない。

このとき，式

$$A^f, \Gamma \to \text{Ⓗ}$$

が証明可能ならば，fを含まぬ式

$$A, \Gamma \to \text{Ⓗ}$$

も証明可能である。

§3. 基本定理の証明

3.1. $\exists y F(y, x_1, \cdots, x_n)$ の外に1つも $\forall$ がない場合：このときfは0-変数の関数記号ゆえ定理は明らかである.

3.2. $\exists y F(y, x_1, \cdots, x_n)$ の外に少なくとも1つの $\forall$ がある場合：Aの性質より $\exists y F(y, x_1, \cdots, x_n)$ は $\forall x_n \exists y F(y, x_1, \cdots, x_n)$ なる形でしかAにおいて存在しないと考えてよい.

補題1. LJ で証明可能な式は Cut を1つも用いないで LJ で証明可能である.

証明. Gentzen[1].

論理式が, argument のなかに束縛変数を含む関数記号 f を少なくとも1つは含むとき, その論理式を f-論理式とよぶ.

補題2. $A^f, \Gamma \to$ Ⓗ を終式とする Cut なしの証明図に現われるどの式も, 右辺に f-論理式を含まない.

証明. 証明図が Cut を含まぬこと, 終式が右辺に f-論理式を含まぬことおよび基本定理の仮定2) による.

補題3. 式 $A^f, \Gamma \to$ Ⓗ に至る Cut なしの証明図が与えられたとき, 次の条件をみたす証明図が存在する.

1) 終式は $A^f, A, \Gamma \to$ Ⓗ の部分式である.

2) Cut を含まない.

3) 相異なる f-term ($f(t_1, \cdots, t_n)$ なる形の term) としては与えられた証明図に現われたもの以外を含まぬ.

4) どのf-論理式の祖先もすべて$\forall$-左の主論理式である.

証明. 補題2より始式はf-論理式を含まぬから, f-論理式の祖先は$\wedge$-左, 増-左あるいは$\forall$-左の主論理式である. $\wedge$-左や増-左の主論理式が祖先のときは主論理式をAにおいて対応するf-論理式でない論理式になおし, 以下適当に証明図を修正すればよい.

補題4. 式 $A^f, \Gamma \to \Theta$ に至るCutなしの証明図$\mathbb{P}$において, どのf-論理式の祖先もすべて$\forall$-左の主論理式であるとする. このとき$\mathbb{P}$に現われるf-論理式はいかなる$\mathbb{P}$の極大なf-termをも含まない.

証明. Cutがないからf-論理式の子孫はA^fである. しかるにA^fはf-termを含まぬから, もしf-論理式がf-termを含めば, Aの性質より$\forall x_i$でそのf-termは消える. 一方, f-論理式の祖先は$\forall$-左の主論理式ゆえ, そこで従論理式を考えれば極大なf-termを含むf-termが存在することになって矛盾する.

補題5. 式 $A^f, \Gamma \to \Theta$ に至るCutなしの証明図において, どのf-論理式の祖先もすべて$\forall$-左の主論理式であるとする. $f(\tau)$が証明図に現われる極大なf-termの1つとすれば, 以下の条件をみたす証明図が存在する.

1) 終式は $A^f, \Gamma \to \Theta$ である.

2) Cutを含まない.

3）相異なる f-term としては，与えられた証明図に現われたもの以外を含まない．

4）どの f-論理式の祖先もすべて ∀-左の主論理式である．

5）従論理式が $F(f(\tau),\tau)$ で f-論理式でなく，主論理式が f-論理式である ∀-左の推論図は下式に $f(\tau)$ を含まない．

補題6．式 $A^f, \Gamma \rightarrow \Theta$ に至る Cut なしの証明図 $\mathbb{P}$ において $f(\tau)$ を極大な f-term の1つとする．$\mathbb{P}$ においては，従論理式が $F(f(\tau),\tau)$ で f-論理式でなく，主論理式が f-論理式である ∀-左の推論図は，すべて下式に $f(\tau)$ を含まないとする．このとき次の条件をみたす証明図が存在する．

1）終式は $A^f, A, \Gamma \rightarrow \Theta$ の部分式である．

2）Cut を含まない．

3）相異なる f-term の個数は $\mathbb{P}$ に現われる相異なる f-term の個数より少ない．

証明．$\mathbb{P}$ において，$\mathbb{P}$ にない自由変数 a で $f(\tau)$ をすべておきかえる．$F(a,\tau)$ を従論理式とする ∀-左においては，まず ∃-左を，次いで ∀-左を適用し，以下適当に証明図を修正すればよい．ここで補題4が使われる．

さて，基本定理の証明にもどろう．補題1により，Cut なしの $A^f, \Gamma \rightarrow \Theta$ に至る証明図 $\mathbb{P}_1$ が存在する．$\mathbb{P}_1$ に現われる相異なる f-term の個数を $n(\mathbb{P}_1)$ と書けば，$n(\mathbb{P}_1)$ に関する数学的帰

納法によって　$A, \Gamma \to \textcircled{H}$　に至る証明図の存在を示す。

3.21. $n(\mathbb{P}_1)=0$ のとき：$\mathbb{P}_1$ に補題3を適用して存在する証明図を $\mathbb{P}_2$ とする。$\mathbb{P}_2$ の性質3)，4)より，終式は f-論理式 A^f を含まない。よって $\mathbb{P}_2$ に構造に関する推論図を適用して求める証明図が得られる。

3.22. $n(\mathbb{P}_1)>0$ のとき：$\mathbb{P}_1$ に補題3を適用して存在する証明図を $\mathbb{P}_2$ とする。$n(\mathbb{P}_1) \geqq n(\mathbb{P}_2)$ である。

3.221. $\mathbb{P}_2$ の終式が A^f を含まぬとき：$\mathbb{P}_2$ に必要なだけ構造に関する推論図を補って求める証明図が得られる。

3.222. $\mathbb{P}_2$ の終式が A^f を含むとき：

3.222.1. $n(\mathbb{P}_1)>n(\mathbb{P}_2)$ のとき：$\mathbb{P}_2$ に帰納法の仮定を適用して求める証明図の存在がわかる。

3.222.2. $n(\mathbb{P}_1)=n(\mathbb{P}_2)$ のとき：$\mathbb{P}_2$ に現われる極大な f-term の1つを $f(t)$ とする。補題5を $\mathbb{P}_2$ に適用して存在する証明図を $\mathbb{P}_3$ とする。$n(\mathbb{P}_2) \geqq n(\mathbb{P}_3)$ である。

3.222.21. $n(\mathbb{P}_2)>n(\mathbb{P}_3)$ のとき：$\mathbb{P}_3$ に帰納法の仮定を適用して求める証明図の存在がわかる。

3.222.22. $n(\mathbb{P}_2)=n(\mathbb{P}_3)$ のとき：$\mathbb{P}_3$ に補題6を適用して存在する証明図を $\mathbb{P}_4$ とする。$\mathbb{P}_4$ の終式が A^f を含まなければ構造に関する推論図を必要なだけ補充して求める証明図が得られるし，$\mathbb{P}_4$ の終式が A^f を含んでも，$n(\mathbb{P}_3)>n(\mathbb{P}_4)$ だから，

帰納法の仮定を適用すれば求める証明図の存在がわかる．

よって補題5の証明をすれば基本定理の証明が完結する．

§4. 補題5の証明

証明図 $\mathbb{P}$ において，$\forall$-左の推論図のうち，従論理式が $F(f(\tau),\tau)$ で f-論理式でなく主論理式が f-論理式で，かつ下式に $f(\tau)$ を含むものの個数を $d(\mathbb{P})$ と書く．$d(\mathbb{P})$ に関する数学的帰納法によって 1) から 5) をみたす証明図の存在を示す．

4.1. $d(\mathbb{P})=0$ のとき：与えられた証明図が求めるものである．

4.2. $d(\mathbb{P})>0$ のとき：与えられた証明図 $\mathbb{P}$ の部分証明図で次の条件をみたすものが存在する．

1) 終式は $f(\tau)$ を含まぬ．

2) 従論理式が $F(f(\tau),\tau)$ で f-論理式でなく主論理式が f-論理式である $\forall$-左で，下式に $f(\tau)$ を含む推論図を含む．

このような部分証明図のうち，一番上にあるものの1つを $\mathbb{P}'$ とする．このとき，以下の条件をみたす証明図 $\mathbb{Q}$ の存在が示せたとする：

1) 終式は $\mathbb{P}'$ の終式の部分式である．

2) cut を含まない．

3) 相異なる f-term としては $\mathbb{P}'$ に現われたもの以外を含まない．

4) どの f-論理式の祖先もすべて $\forall$-左の主論理式である．

5)　$d(\mathfrak{Q})=0$.

$\mathfrak{P}$において$\mathfrak{P}'$を$\mathfrak{Q}$でおきかえて得られる証明図を考えるとdは小さくなっているから，帰納法の仮定により求める証明図の存在がわかる．

$\mathfrak{P}'$では，最小性によって，dで数えられる問題の$\forall$-左の下式から終式までの各式は$\mathfrak{A}(\tau)$を含んでいる．よって，その部分には$\mathfrak{A}(\tau)$に含まれる自由変数を*eigenvariable*としてもつ推論図はない．このことから，問題の$\forall$-左を可能な限り下におしこめてやれば求める$\mathfrak{Q}$の存在が証明できる．正確には，帰納的に$\mathfrak{Q}$を構成すればよい．

文　献

[1] G. Gentzen : *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Math. Zeitschr., 39 (1935), 176-210, 405-431

[2] S. Maehara : *The predicate calculus with ε-symbol*, J. Math. Soc. Japan, 7, 323-344 (1955).

[3] H. Rasiowa : *On the ε-theorems*, Fund. Math. 43, 156-165 (1956).

[4] Rasiowa-Sikorski : *Formalisierte intuitionistische elementare Theorien*, Constructivity in Mathematics, Proc. of the Coll. held in Amsterdam 1957, 241-249 (1959)